german

Mannheimer Manuskripte 222

Januar 97

Vertexalgebren – eine Einführung

von Martin Schlichenmaier[1]

Vortrag in der Arbeitsgemeinschaft Mannheim - Heidelberg

Üblicherweise beginnt man einen Vortrag mit einer Motivation. Diese kann aber hier nur sehr pauschal sein. Vertexalgebren spielen eine wichtige Rolle, sowohl in der theoretischen Physik (Quantenfeldtheorie, konforme Feldtheorie, Stringtheorie, ...) als auch in der Mathematik (Darstellungen von Kac-Moody-Algebren, Monster und Mondschein, Modulformen, ...). Insbesondere werden wir im 2. Teil dieses Themenkomplexes auf die Verbindung zur Theorie der Modulformen eingehen. Allerdings: Eine Darstellung der Anwendungen in diesem Einführungsvortrag wäre viel komplizierter als die eigentliche, mathematische Definition einer Vertexalgebra. Deshalb möchte ich hier umgekehrt vorgehen. Ich definiere zuerst, was eine Vertexalgebra ist. Dann skizziere ich die Konstruktion der Vertexalgebra zu einem Gitter. Diese Konstruktion wird im Detail in einem späteren Vortrag ausgeführt werden. Zum Abschluß versuche ich ein wenig auf die physikalische Motivation einzugehen. Sicherlich ist diese nützlich, da viele Begriffsbildungen durch den Namen bereits ihren physikalischen Ursprung verraten. Es wird aber im weiteren Verlauf nicht mehr darauf aufgebaut werden.

Teil I: Definition einer Vertexalgebra

Ich schließe mich im folgenden [Kac] an und verwende *Vertexalgebra* und *Vertexopera-*

[1] Universität Mannheim, Fakultät für Mathematik und Informatik, 68131 Mannheim, Germany, schlichenmaier@math.uni-mannheim.de

toralgebra als Synonyme. Wir gehen von einem *Supervektorraum* V aus, d.h.

$$V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}, \qquad \bar{0}, \bar{1} \in \mathbb{Z}/2 \ .$$

Die Elemente $v \in V_{\bar{0}}$ heißen Elemente mit gerader Parität (auch: gerade Elemente, bzw. Bosonen), die Elemente $v \in V_{\bar{1}}$ heißen Elemente ungerader Parität (auch: ungerade Elemente, bzw. Fermionen). Die Parität sei mit $p(v) \in \mathbb{Z}/2$ für die Elemente v mit Parität bezeichnet. Für die anderen Elemente $v \in V$ ist sie nicht definiert. Die Dimension von V ist die übliche Dimension. Im Falle endlicher Dimension ist die *Superdimension* definiert als $\operatorname{sdim} V = \dim V_{\bar{0}} - \dim V_{\bar{1}}$.

Die Elemente des Supervektorraums heißen Zustände.[2] Ein Feld (in Bezug auf den gegebenen festen Superraum) ist die formale Reihe

$$a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}, \qquad \text{mit} \quad a_{(n)} \in \operatorname{End} V \ , \tag{1.1}$$

die die Bedingung erfüllt, daß für alle $v \in V$ gilt

$$a_{(n)} v = 0, \qquad \text{für } n \gg 0. \tag{1.2}$$

(Achtung: Ab welchem n dies richtig ist, darf von v abhängen.) Ist

$$A : V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}} \to V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$$

ein Endomorphismus, so sagt man, A hat *gerade Parität* falls Elemente mit Parität ihre Parität nicht ändern, *ungerade Parität*, falls sie diese gerade invertieren:

$$A\left(V_{\alpha}\right) \subseteq V_{\alpha + p(A)} \ .$$

Ein Feld $a(z)$ hat die Parität $p(a(z))$, falls $p(a(z)) = p(a_{(n)})$ für alle n ist.
Ist $A, B \in \operatorname{End} V$ von der Parität $p(A)$, bzw. $p(B)$, so ist der Superkommutator definiert als

$$[A, B] = A \cdot B - (-1)^{p(A) \cdot p(B)} B \cdot A \ . \tag{1.3}$$

[2] Wer möchte, kann fürs erste annehmen $V = V_{\bar{0}}$. Für die Anwendung in der Theorie der Modulformen werden wir später jedoch auch ungerade Elemente brauchen.

Definition. Eine Vertexalgebra $(\ V,\ |0\rangle,\ Y\ )$ besteht aus den Daten

(i) einem Supervektorraum V – dem Raum der Zustände,

(ii) einem festen geraden Vektor $|0\rangle \in V_{\bar{0}}$ – dem Vakuumvektor,

(iii) der Zustands-Feld-Korrespondenz, d.h. einer paritätserhaltenden, linearen Abbildung Y von V in den Raum der Felder

$$a \mapsto Y(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1} \ , \tag{1.4}$$

welche die folgenden Axiome erfüllen:

(1) (**Translationskovarianz**) Für den Operator $T \in \operatorname{End} V$ gegeben durch

$$T(a) = a_{(-2)}|0\rangle \tag{1.5}$$

gilt

$$[T, Y(a,z)] = \partial Y(a,z)\ . \tag{1.6}$$

(2) (**Vakuumbedingungen**)

$$Y(|0\rangle, z) = id_V, \qquad Y(a,z)\,|0\rangle_{|z=0} = a\ . \tag{1.7}$$

(3) (**Lokalität**)

$$(z-w)^N\,[Y(a,z), Y(b,w)] = 0 \qquad \text{für } N \gg 0\ . \tag{1.8}$$

□

Hierzu sind einige Erläuterungen notwendig:

1. Läßt man ein Feld $a(z)$ auf einen Vektor $v \in V$ los, so erhält man durch koeffizientenweises Anwenden wieder eine formale Reihe. Die Koeffizienten dieser Reihe sind nun Vektoren. Die Bedingung $a_{(n)}v = 0$ für $n \gg 0$ besagt, daß die Reihe nach oben abbricht. Trotzdem ist die zweimalige Hintereinanderausführung von Feldern mit derselben Variablen z nicht direkt möglich. Wir werden später hierzu “Regularisierungsprozeduren” (Normalordnung, etc.) einführen müssen. In Axiom (3) werden jedoch Felder in den verschiedenen Variablen z und w hintereinander angewendet.

Die Identität dort ist als koeffizientenweise Identität der (End V-wertigen) auftretenden Reihen $\sum_{m,n} a_{m,n} z^m w^n$ zu verstehen. Die Lokalität ist eine Aussage über die Vertauschbarkeit der Felder. Es handelt sich hierbei um eine Nullteilerbedingung. Beachte, es handelt sich hierbei nicht um Potenzreihen, ansonsten gäbe es keine Nullteiler.

2. Es ist $|0\rangle \mapsto Y(|0\rangle, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |0\rangle_{(n)} z^{-n-1}$. Aus der Vakuumbedingung folgt

$$|0\rangle_{(n)} = \delta_{n,-1} \cdot id_V, \qquad \text{also} \quad T|0\rangle = 0 \ . \tag{1.9}$$

Desweiteren gilt für beliebige $a \in V$

$$Y(a,z)\,|0\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)}(|0\rangle) z^{-n-1}$$

und daraus folgt nach Setzen von $z = 0$ mit Axiom (2)

$$a_{(n)}|0\rangle = 0, \quad \text{für } n \geq 0, \qquad a_{(-1)}|0\rangle = a \ . \tag{1.10}$$

3. Der Operator T heißt *infinitesimaler Translationsoperator*. Ist $a(z)$ ein Feld, so ist unter $\partial(a(z))$ das Feld zu verstehen, welches man durch formales Ableiten nach der Variablen z erhält. D.h. es gilt

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1} \quad \mapsto \quad \partial(a(z)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-n) a_{(n-1)} z^{-n-1} \ . \tag{1.11}$$

Hat a die Parität $p(a)$, so haben die zugeordneten Endomorphismen $a_{(n)}$ ebenfalls die Parität $p(a)$. Da $p(|0\rangle) = \bar{0}$ ist, folgt daß $T(a) = a_{(-2)}|0\rangle$ ebenfalls die Parität $p(a)$ besitzt. Dies bedeutet: T ist ein gerader Operator. Insbesondere ist der Superkommutator der übliche Kommutator. In der Gleichung (1.6) ist der Kommutator komponentenweise zu verstehen. Daraus berechnet sich

$$[T, a_{(n)}] = -n a_{(n-1)} \ . \tag{1.12}$$

Man berechnet

$$T(T(a)) = T a_{(-2)}|0\rangle = a_{(-2)} T|0\rangle + [T, a_{(-2)}]|0\rangle = 2a_{(-3)}|0\rangle \ .$$

Ebenso ergibt sich $T^n(a) = n!\, a_{(-n-1)}|0\rangle$. Dies kann nun in kompakter Form umgeschrieben werden zu

$$Y(a,z)|0\rangle = \mathrm{e}^{zT}(a) \tag{1.13}$$

da gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} T^n(a) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n a_{(-n-1)}|0\rangle$$

und die anderen Elemente wegen (1.10) verschwinden.

4. Man kann auch den Operator T als weiteres Datum in die Definition einer Vertexalgebra aufnehmen und die Gleichung (1.5) ersetzen durch die zusätzliche Vakuumbedingung $T|0\rangle = 0$. Aus der Kommutatorrelation (1.12) ergibt sich die Gleichung (1.5) dann als Konsequenz.

5. Die "integrierte" Form der Translationsbedingung (1.6) lautet für $|z| > |w|$

$$\mathrm{e}^{wT} Y(a,z) \mathrm{e}^{-wT} = Y(a, z+w) \ . \tag{1.14}$$

Darauf kommen wir in einem späteren Vortrag zurück.

Zusatzstrukturen.

Definition. Eine Vertexalgebra heißt *graduiert*, falls es einen geraden diagonalisierbaren Operator H auf V gibt, so daß gilt

$$[H, Y(a,z)] = z\,\partial Y(a,z) + Y(Ha, z) \ . \quad \square \tag{1.15}$$

Gilt $Ha = \Delta a$ mit $\Delta \in \mathbb{C}$, so sagt man: Das Feld $Y(a,z)$ hat das *konforme Gewicht* Δ. In diesem Fall kann man (1.15) umschreiben zu

$$[H, Y(a,z)] = \big(z\partial + \Delta\big) Y(a,z) \ . \tag{1.16}$$

Für Felder vom konformen Gewicht Δ erweist sich ein Indexshift als ganz nützlich

$$Y(a,z) = \sum_{n \in -\Delta + \mathbb{Z}} a_n z^{-n-\Delta}, \tag{1.17}$$

d.h. $a_{(n)} = a_{n-\Delta+1}$. Dann gilt etwa $[H, a_n] = -n a_n$.

Aus den Axiomen berechnet sich die Vertauschungsrelation $[H, T] = T$ mit dem Translationsoperator T. Als homogene Unterräume der Graduierung werden die Eigenräume des Operators H eingeführt

$$V = \bigoplus_{\lambda} V^{(\lambda)} \ .$$

Für die Felder (1.17) mit konformem Gewicht gilt

$$a_n(V^{(\lambda)}) \subseteq V^{(\lambda-n)}, \qquad TV^{(\lambda)} \subseteq V^{(\lambda+1)} \ . \tag{1.18}$$

Wir haben somit eine "graduierte Operation".

Ich komme nun zu dem wichtigen Begriff der *konformen Vertexalgebra.* Hierzu muß ich zuerst an die Definition der Virasoro-Algebra erinnern. Die Virasoro-Algebra $\mathcal{V}$ ist die Lie-Algebra erzeugt von den Basiselementen $L_m,\ m \in \mathbb{Z}$ und C mit den Strukturgleichungen

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m,-n}C, \qquad [C, L_m] = 0, \qquad m, n \in \mathbb{Z} \ . \tag{1.19}$$

Das Element C ist also ein zentrales Element der Algebra. Man kann die Algebra auch auf (mindestens) zwei weitere Arten beschreiben. Zum einen ist sie die universelle zentrale Erweiterung

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \stackrel{1 \mapsto C}{\longrightarrow} \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} \longrightarrow 0 \tag{1.20}$$

der Lie-Algebra $\mathcal{W}$ der meromorphen Vektorfelder auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, die holomorph außerhalb der Punkte $z = 0$ und $z = \infty$ sind. Die L_n sind Lifts der Vektorfelder $-z^{n+1}\frac{d}{dz}$. Zum andern kann sie aber auch gegeben werden als die universelle zentrale Erweiterung der Lie-Algebra der reell-analytischen Vektorfelder auf der Kreislinie S^1, die eine endliche Fourierentwicklung haben. Die L_n entsprechen hierbei den Vektorfeldern $\mathrm{i}\, e^{\mathrm{i}\, n\varphi}\frac{d}{d\varphi}$.

Hat man eine Darstellung von $\mathcal{V}$, in der das zentrale Element C als $c \cdot id,\ c \in \mathbb{C}$ operiert, so nennt man die Zahl c die zentrale Ladung der Darstellung.

Definition. **(i)** Ein *konformer Vektor* ω einer Vertexalgebra V ist ein gerader Vektor, für den das zugehörige Feld (beachte den Shift!)

$$Y(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \tag{1.21}$$

die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) $L_{-1} = T$, der Translationsoperator,

(2) L_0 ist diagonalisierbar,

(3) die Identifikation der L_n aus (1.19) mit den L_n aus (1.21) und C mit $c \cdot id_V$ mit einem geeigneten $c \in \mathbb{C}$ definiert eine Darstellung der Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung $c \in \mathbb{C}$.

(ii) Die Zahl c heißt die zentrale Ladung des konformen Vektors ω. $\square$

Definition. Besitzt eine Vertexalgebra einen konformen Vektor ω mit zentraler Ladung c, so heißt V *konforme Vertexalgebra* vom *Rang* c. Das Feld (1.21) heißt *Virasoro-Feld* oder *Energie-Impuls-Feld* der Vertexalgebra. $\square$

Ist V eine konforme Vertexalgebra, so ist sie durch den Operators L_0 automatisch graduiert. Die Gleichung (1.15) ergibt sich aus der Virasoro-Struktur, wie wir in einem späteren Vortrag sehen werden.

Teil II: Die Vertexalgebra zu einem Gitter

Ich kann hier nur eine sehr grobe Skizze geben. Die eigentliche Konstruktion wird in einem separaten Vortrag ausgeführt werden. Sei Q eine freie abelsche Gruppe vom Rang ℓ und $(.|.)$ eine $\mathbb{Z}$-wertige symmetrische Bilinearform. Somit ist Q ein ganzzahliges Gitter. Sei $\epsilon : Q \times Q \to \{+1, -1\}$ ein 2-Kozykel, d.h. es gilt

$$\epsilon(\alpha, 0) = \epsilon(0, \alpha) = 1 \ ,$$
$$\epsilon(\beta, \gamma) \cdot \epsilon(\beta + \gamma, \alpha) = \epsilon(\gamma, \alpha + \beta) \cdot \epsilon(\beta, \alpha) \ .$$

Der Kozykel erfülle die zusätzliche Bedingung[3]

$$\epsilon(\alpha, \beta) \cdot \epsilon(\beta, \alpha) = (-1)^{(\alpha|\beta)+(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)} \ . \tag{2.1}$$

Die getwistete Gruppenalgebra $\mathbb{C}_\epsilon[Q]$ ist definiert als die $\mathbb{C}$-Algebra mit Basis e^α, $\alpha \in Q$ und der Multiplikationsregel

$$e^\alpha \cdot e^\beta = \epsilon(\alpha, \beta) e^{\alpha+\beta}, \qquad e^0 = 1 \ . \tag{2.2}$$

[3] Einen solchen gibt es immer, siehe [Kac, Remark 5.5a].

Sei $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} Q$ die Komplexifizierung von Q. Die Bilinearform $(.|.)$ sei linear ausgedehnt. Zu $\mathfrak{h}$ kann die affine Algebra $\widehat{\mathfrak{h}}$ konstruiert werden. Als Vektorraum ist $\widehat{\mathfrak{h}}$

$$\widehat{\mathfrak{h}} = \big(\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{h}\big) \oplus \mathbb{C} \cdot K \tag{2.3}$$

und die Lie-Struktur ist gegeben durch

$$[t^n \otimes h_1, t^m \otimes h_2] = n \cdot (h_1|h_2) \cdot \delta_{n,-m} \cdot K, \qquad [K, \widehat{\mathfrak{h}}] = 0 \ . \tag{2.4}$$

Sei S die symmetrische Algebra über dem Unterraum $\widehat{\mathfrak{h}}^{<0} := \sum_{n<0} t^n \otimes \mathfrak{h}$. Abkürzend sei $t^n h$ für $t_n \otimes h$ gesetzt.

Die Vertexalgebrastruktur ist wie folgt definiert:

– Der Zustandraum ist

$$V_Q = S \otimes \mathbb{C}_\epsilon[Q] \ .$$

– Die Parität ist

$$p(s \otimes e^\alpha) = (\alpha|\alpha) \mod 2 \ .$$

– Der Vakuumvektor ist $|0\rangle = 1 \otimes 1$.

– Der infinitesimale Translationsoperator ist gegeben durch

$$T\big((t^{-n}h) \otimes 1\big) = n \cdot (t^{-n-1}h) \otimes 1, \qquad T(1 \otimes e^\alpha) = t^{-1}\alpha \otimes e^\alpha \ ,$$

mit Fortsetzung durch die Derivationsregel (für die Algebra V_Q).

Was noch fehlt ist die Zustands-Feld-Korrespondenz (1.4). Um diese zu definieren, ist es nützlich zuerst eine Operation der gesamten affinen Algebra $\widehat{\mathfrak{h}}$ auf V_Q einzuführen. $\widehat{\mathfrak{h}}$ operiert auf S durch die Operation π_1 gegeben durch

(1) $\pi_1(K) = id$,
(2) $\pi_1(t^n h)$ ist für $n < 0$ die Multiplikation mit $t^n h$,
(3) $\pi_1(t^n h)$ ist für $n > 0$ die Derivation definiert durch

$$(t^n h)(t^{-s} a) = n \cdot \delta_{n,s} (h|a) \ , \tag{2.5}$$

(4) $\pi_1(\mathfrak{h}) = 0$.

Auf dem getwisteten Gruppenring wird eine Aktion π_2 gegeben durch

$$\pi_2(K) = 0, \qquad \pi_2(t^n h)e^\alpha = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ (\alpha|h)e^\alpha, & n = 0 \ . \end{cases} \tag{2.6}$$

Die gesamte Aktion auf V_Q ist durch $\pi = \pi_1 \otimes 1 + 1 \otimes \pi_2$ gegeben.

Für die $h \in \mathfrak{h}$ setzen wir

$$h_n = \pi(t^n h), \quad \text{und} \quad h(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n z^{-n-1} \ . \tag{2.7}$$

Geht man von $|0\rangle = 1 \otimes 1$, dem Vakuum aus, so erzeugen die Operatoren h_n für $n < 0$ durch die Multiplikation im 1.Faktor (in der symmetrischen Algebra S) Zustände, d.h. Vektoren aus V_Q. Die Operatoren h_n mit $n > 0$ "vernichten" Zustände, aufgrund der Relation (2.5). Treten keine Terme mit t^{-n}-Anteil auf, wird der entsprechende Vektor auf Null abgebildet, er wird annulliert. Insbesondere wird das Vakuum unter diesen h_n auf Null abgebildet. In physikalischer Sprechweise sind die h_n mit $n < 0$ *Erzeugungsoperatoren*, die mit $n > 0$ *Vernichtungsoperatoren*. Bei einem beliebigen, aber dann festgehaltenen $v \in V_Q$ treten nur endlich viele (negative) n_i in seiner Darstellung als Element in der symmetrischen Algebra (im ersten Tensorfaktor) auf. Damit annulliert h_n für große n den Zustand v, also $h_n v = 0$ für $n \gg 0$, d.h. $h(z)$ ist ein Feld.

Für die $\alpha \in Q$ sind über $1 \otimes \alpha \in \mathfrak{h}$ auch Operatoren α_n und Felder $\alpha(z)$ zugeordnet. Der Vertexoperator, der dem Vektor $1 \otimes e^\alpha$ zugeorodnet ist, ist definiert als

$$Y(1 \otimes e^\alpha, z) := \Gamma_\alpha(z) := e^\alpha \cdot z^{\alpha_0} \cdot \exp(-\sum_{n<0} \frac{z^{-n}}{n}\alpha_n) \cdot \exp(-\sum_{n>0} \frac{z^{-n}}{n}\alpha_n) \ . \tag{2.8}$$

Die letzten zwei Terme hierbei sind als Anwendung der Exponentialreihe, der man die (formal unendliche) Summe der jeweiligen Endomorphismen als Argument einsetzt hat, zu verstehen. Für einen festen Vektor $v \in V_Q$ bleiben aber nur endlich viele Endomorphismen (zu einer festen z-Potenz) übrig, die nichttrivial operieren. Der Term z^{α_0} ist als $\exp((\log z) \cdot \alpha_0)$ zu interpretieren. Da α_0 nur auf dem 2.Faktor nichttrivial operiert gilt mit (2.6)

$$z^\alpha \, (s \otimes e^\beta) = z^{(\alpha|\beta)} \cdot (s \otimes e^\beta) \ .$$

Der erste Term e^α soll Linksmultiplikation mit $1 \otimes e^\alpha$ bedeuten. $\Gamma_\alpha(z)$ ist der "klassische Vertexoperator der Physik". Dem Leser sei empfohlen $Y(1 \otimes e^\alpha, z)|0\rangle_{|z=0} = 1 \otimes e^\alpha$ nachzurechnen.

Die Formel (2.8) sieht auf den ersten Blick abschreckend aus. Es steckt jedoch die folgende **Heuristik** dahinter. Man sollte $\Gamma_\alpha(z)$ auffassen als

$$\Gamma_\alpha(z) \text{ ``}=\text{''} \exp\Big(\int \alpha(z)dz\Big) \ . \tag{2.9}$$

Das Integral meint hier die unbestimmte Integration. Der Faktor e^α in (2.8) ist als Integrationskonstante zu interpretieren. Leider ist in (2.9) die rechte Seite nicht wohldefiniert. Durch die Einführung einer *Normalordnung* kann man daraus Sinn machen,

$$\Gamma_\alpha(z) \text{ ``}=\text{''} :\exp\Big(\int \alpha(z)dz\Big): \ . \tag{2.10}$$

Die Symbole $:\ :$ sollen die Normalordnung bedeuten. Deren genaue Form möchte ich hier nicht niederschreiben. Prinzipiell wird durch die Normalordnung dafür gesorgt, daß die Ableitungsoperatoren (= Vernichtungsoperatoren) möglichst weit nach rechts gebracht werden. Beim Übergang von der durch (2.9) gegebenen Ordnung der Operatoren α_n zur Normalordnung in (2.10) sind gewisse α_n und α_m zu vertauschen. Die Relation (2.4) besagt, daß diese Operatoren fast immer vertauschen. Nur für $n = -m$ tritt jeweils ein Term auf, der wie ein skalares Vielfaches der Identität operiert. Allerdings tritt für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein solcher Term auf. Ignoriert man Vielfache der Identität in dieser Heuristik, so "stimmen" (2.9) und (2.10) überein. (Bis auf das Problem, daß der eine Ausdruck gar nicht definiert ist.) Die Summe unter der Exponentialfunktion wird weiter aufgespalten, indem man die Summation für $n < 0$, $n = 0$ und $n > 0$ separat ausführt und das ganze dann als Produkt in der richtigen Reihefolge, also ganz rechts die Exponentialfunktion in den Vernichtungsoperatoren ($n > 0$), schreibt. Da es sich hierbei jedoch um nichtkommutierende Größen handelt, hat man einen Fehler gemacht. Nach der Campbell-Hausdorff-Formel muß man Kommutatoren aufnehmen. Wiederum aus (2.4) folgt, daß die Kommutatoren zweier Elemente Skalare sind und die höheren Kommutatoren verschwinden. Indem man auch hier Vielfache der Identität ignoriert, erhält man somit die Form (2.8). Physiker bezeichnen diese Heuristik als Regularisierung. Dieses Ignorieren der Skalare ist nicht so mathematisch unsinnig, wie es auf den ersten Blick erscheint. Mathematisch bedeutet es, daß man von einer "echten Darstellung" (einer Algebra, einer Gruppe, einer Lie-Algebra, ...) zu einer projektiven Darstellung übergeht. Projektive Darstellungen können aber wieder beschrieben werden, als echte Darstellungen geeigneter zentral-erweiterter Objekte. Beachte etwa, daß die Virasoro-Algebra die zentral-erweiterte Vektorfeldalgebra ist.

Nach diesem Ausflug in die Heuristik, zurück zur **Mathematik**. Als allgemeiner Vertexoperator wird unter Benutzung der Normalordnung gesetzt (daß dieser so zu setzen ist, folgt aber bereits aus einigen anderen allgemeinen Eigenschaften)

$$Y\big((t^{-n_1-1}h_1)(t^{-n_2-1}h_2)\cdots\otimes e^\alpha, z\big) =: \partial^{(n_1)}h_1(z)\partial^{(n_2)}h_2(z)\cdots\Gamma_\alpha(z) : \ .$$

Satz. *Sei Q ein ganzzahliges Gitter vom Rang ℓ mit* **nichtausgearteter** *Bilinearform $(.|.)$. Sei weiter $\{a^i\}$ und $\{b^i\}$ ein System dualer Basen von $\mathfrak{h}$ (d.h. es gilt $(a^i|b^j) = \delta_{i,j}$) dann ist der Vektor*

$$\omega = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell} a^i_{-1}b^i_{-1}|0\rangle$$

ein konformer Vektor der Vertexalgebra zum Gitter Q. Es handelt sich also um eine konforme Vertexalgebra. Die zentrale Ladung des Virasoro-Felds $Y(\omega, z)$ beträgt ℓ. $\square$

Diese Vertexalgebra hat noch weitere wichtige Strukturen. Dies soll in einem späteren Vortrag ausgeführt werden. Hier möchte ich lediglich den Begriff des *primären Felds* erwähnen. Ein Feld $a(z)$ heißt primär vom konformen Gewicht Δ, falls gilt

$$[L_m, a(z)] = z^m\big(z\,\partial + (m+1)\Delta\big)a(z)$$

für alle Komponenten L_m des Virasoro-Felds. Dies ist eine Erweiterung der Gleichung (1.16), beachte $H = L_0$. Für unsere Gittervertexalgebren sind etwa die Felder $h(z)$, $h \in \mathfrak{h}$ primär vom konformen Gewicht 1 und die Felder $\Gamma_\alpha(z) = Y(1 \otimes e^\alpha, z)$ primär vom konformen Gewicht $\frac{1}{2}(\alpha|\alpha)$.

Mit Hilfe der Vertexalgebra-Konstruktion kann man ausgehend vom Wurzelgitter einer einfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ Darstellungen der affinen Kac-Moody-Algebra $\widehat{\mathfrak{g}}$ erhalten. Eventuell wird darauf nochmals in einem späteren Vortrag eingegangen werden.

Monster und Mondschein. Ausgehend vom 24-dimensionalen Leechgitter kann man nach einigen zusätzlichen Konstruktionen (siehe [FLM]) eine konforme Vertexalgebra W vom Rang 24 konstruieren, welche als Automorphismengruppe die Monstergruppe M besitzt. Zur Erinnerung: Die Monstergruppe ist die größte endliche einfache sporadische Gruppe. Diese Vertexalgebra ist $\mathbb{Z}$-graduiert mit endlichdimensionalen homogenen Teilräumen W_n derart, daß gilt $W_m = 0$ für $m \ll 0$:

$$W = \bigoplus_{n=k}^{\infty} W_n \ .$$

Für solche Vektorräume ist es möglich die *graduierte Dimension*

$$\dim_q W = \sum_{n=k}^{\infty} \dim W_n q^n$$

als Laurentreihe in der formalen Variablen q einzuführen. Für die Vertexalgebra W erweist sich (bis auf Addition der Konstanten 744) die graduierte Dimension als die q-Entwicklung der elliptischen Modulfunktion j

$$j(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \cdots \ .$$

Die Aktion der Automorphismen ist eine graderhaltende Aktion. Die einzelnen Teilräume müssen deshalb Darstellungen der Monstergruppe M ein. Somit sind die Koeffizienten der q-Entwicklung von j nichtnegative Linearkombinationen der Dimensionen der irreduziblen Darstellungen der Monstergruppe. Seien diese Dimensionen der Größe nach geordnet mit $d_0 = 1, d_1, d_2, ..$ bezeichnet, so gilt etwa

$$196884 = d_0 + d_1, \qquad 21493760 = d_0 + d_1 + d_2, \qquad ... \ .$$

NB: Bei den höheren Koeffizienten treten allgemeinere Kombinationen auf, nicht nur die Summen der d_0 bis d_n.

Teil III: Einige Bemerkungen zum physikalischen Ursprung

Die Wightman-Axiome einer bosonischen Quantenfeldtheorie (QFT).

Zuerst sei die Dimension $d \in \mathbb{N}$ beliebig. Sei M der d-dimensionale Minkowski-Raum mit den Koordinaten $(x_0, x_1, \ldots, x_{d-1})$. Hierbei ist $x_0 = c \cdot t$ die Zeitkoordinate ($c > 0$ ist als Lichtgeschwindigkeit zu interpretieren) und die restlichen x_i die Raumkoordinaten. Die Minkowski-Metrik ist definiert als

$$|x-y|^2 := (x_0 - y_0)^2 - (x_1 - y_1)^2 \cdots - (x_{d-1} - y_{d-1})^2 \ . \tag{3.1}$$

Man nennt zwei Teilmengen A und B in M *raumartig getrennt*, falls

$$|x-y|^2 < 0, \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B \ .$$

Der *(Vorwärts-)Lichtkegel* ist definiert als

$$C := \{\, x \in M \mid |x|^2 \geq 0, \quad x_0 \geq 0 \,\} \,. \tag{3.2}$$

Durch die Vorgabe

$$x \geq y \quad \longleftrightarrow \quad x - y \in C \tag{3.3}$$

wird eine *kausale Ordnung* eingeführt.

Mit Hilfe dieser Begriffsbildungen kann man die Postulate der speziellen Relativitätstheorie formulieren. So ist die Lichtgeschwindigkeit c die maximal erreichbare Signalgeschwindigkeit. Sind etwa A und B raumartig getrennte Bereiche von M und $x = (c \cdot t_0, x_1, \ldots, x_{d-1}) \in A$, $y = (c \cdot t_1, y_1, \ldots, y_{d-1}) \in B$, so können zwischen x und y keine Informationen ausgetauscht werden, denn die zu überwindende Distanz in den $d-1$ Raumkoordinaten kann nicht in der zur Verfügung stehenden Zeit $|t_1 - t_0|$ zurückgelegt werden. Der Vorwärtslichtkegel gibt die Punkte an, welche durch Signale aus dem Ursprung $O \in M$ erreicht werden können. Im Falle eines Teilchens, das sich bei $O \in M$ befindet (insbesondere auch bei $t = 0$), gibt er auch an, wo es sich zu späteren Zeitpunkten befinden kann. Die kausale Ordnung überträgt dies alles auf beliebige Anfangspunkte.

Die Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$ ist die Zusammenhangskomponente der Identität in der Gruppe der Transformationen, die die Metrik erhalten. Klar ist, daß unter dieser Gruppe raumartig getrennte Mengen in raumartig getrennte Mengen übergehen und die kausale Ordnung erhalten bleibt. Die Poincaré-Gruppe ist das semidirekte Produkt der Translationen (parametrisiert durch die Vektoren $q \in M$) mit der Lorentzgruppe $\mathcal{L}$ (das ist die Gruppe $SO(1, d-1)$). Die Elemente der Poincaré-Gruppe können somit als Paare (q, Λ) mit $q \in M$ und $\Lambda \in \mathcal{L}$ gegeben werden.

Eine *Quantenfeldtheorie* besteht aus den Daten:

(1) Einem Zustandsraum, dies ist ein komplexer Hilbertraum $\mathcal{H}$,

(2) einem ausgezeichneten Vektor, dem Vakuumvektor $|0\rangle \in \mathcal{H}$,

(3) einer unitären Darstellung $(q, \Lambda) \mapsto U(q, \Lambda)$ der Poincaré-Gruppe,

(4) einer Familie von Feldern $\{\Phi_a\}_{a \in J}$, d.h. operatorwertigen Distributionen auf M. Genauer handelt es sich hierbei um stetige lineare Funktionale $f \mapsto \Phi_a(f)$ definiert auf dem Raum der stark abfallenden C^∞-tensorwertigen Testfunktionen und mit Werten im Raum der linearen Operatoren, welche dicht in H definiert sind.

Desweiteren seien die folgenden Axiome erfüllt:

(1) (**Poincaré-Kovarianz**)

$$U(q,\Lambda)\Phi_a(f)U(q,\Lambda)^{-1} = \Phi_a((q,\Lambda)f) \ .$$

(2) (**Stabiles Vakuum**), d.h. $|0\rangle$ bleibt invariant unter allen Operatoren $U(q,\Lambda)$ und das gemeinsame Spektrum (d.h. die Vektoren aus M gebildet aus den Eigenwerten zu jeweils einem festen Eigenvektor, der dann die Menge aller Eigenvektoren durchläuft) der kommutierenden infinitesimalen Translationsoperatoren P_k liegt im Vorwärtslichtkegel.
Die Operatoren P_k sind hierbei definiert als die selbstadjungierten kommutierenden Operatoren gegeben durch

$$U(q,1) = \exp(\,\mathrm{i}\sum_{k=0}^{d-1} q_k P_k), \qquad q = (q_0, q_1, \dots, q_{d-1}) \ . \tag{3.4}$$

(3) (**Vollständigkeit**). Der Vakuumvektor $|0\rangle$ liegt im Definitionsgebiets jedes Polynoms in den $\Phi_a(f)$s. Bezeichne D das lineare Erzeugnis aller derart aus $|0\rangle$ erhaltenen Elemente, so liegt D dicht in H.

(4) (**Lokalität**). Es gilt

$$\Phi_a(f)\Phi_b(g) = \Phi_b(g)\Phi_a(f)$$

auf D, falls $\operatorname{supp} f$ und $\operatorname{supp} g$ raumartig getrennt sind.

Aus (2) folgt, daß für die Operatoren P_k gilt $P_k|0\rangle = 0$. Die Aussage, daß das gemeinsame Spektrum im Vorwärtslichtkegel liegt, bedeutet, daß für alle Eigenzustände (und nur die werden bei einer Messung angenommen) die Energie ≥ 0 ist und das Vakuum ein Zustand minimaler Energie ist.

Die anschauliche Bedeutung von (4) ist, daß sich Messungen in raumartig getrennten Bereichen nicht beeinflußen, da ansonsten die Signalgeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit wäre.

Die Poincaré-Kovarianz für die Translationen ergibt

$$U(q,1)\Phi_a(x)U(q,1)^{-1} = \Phi_a(x+q) \ . \tag{3.5}$$

Hierbei bin ich der üblichen Konvention gefolgt und habe statt $\Phi_a(f)$ für die ausgewertete Distribution die Symbolik $\Phi_a(x)$ für die Distribution benutzt. Insbesondere bedeutet $\Phi_a(x+q)$: Man nehme eine Testfunktion f, führe eine Translation im Argument um q durch und werte die Distribution Φ_a auf der dadurch erhaltenen Funktion aus.

Die Gleichung (3.5) kann man auch mit den infinitesimalen Erzeugenden (3.4) als

$$\mathrm{i}\,[P_k, \Phi_a] = \partial_{x_k} \Phi_a \tag{3.6}$$

beschreiben.

Konforme Quantenfeldtheorie.

Die konforme Gruppe ist definiert als die Gruppe von Transformationen erzeugt von den Translationen und den *speziellen konformen Transformationen* (Achtung: Diese sind nicht überall definiert)

$$x \;\mapsto\; x^b = \frac{x + |x|^2 b}{1 + 2\langle x, b\rangle + |x|^2 |b|^2}, \qquad b \in M \; . \tag{3.7}$$

Diese Transformationen erhalten die Kausalstruktur; jedoch nicht notwendigerweise die Metrik. Die Poincaré-Gruppe ist eine Untergruppe. Weitere wichtige Elemente sind die Streckungen

$$x \mapsto \lambda x, \quad \lambda \neq 0 \; .$$

Eine Theorie, welche kovariant unter der größeren Gruppe ist, ist eine "fundamentalere" Theorie als die Theorie, welche nur kovariant unter der Poincaré-Gruppe ist.

Eine Quantenfeldtheorie heißt eine *konforme Quantenfeldtheorie*, falls die unitäre Darstellung der Poincaré-Gruppe zu einer unitären Darstellung der konformen Gruppe erweitert werden kann derart, daß gilt:

(1) Das Vakuum bleibt stabil auch unter den hinzugekommenen Transformationen.

(2) Man hat die spezielle konforme Kovarianz

$$U(b)\Phi_a(x)U(b)^{-1} = \varphi(b,x)^{-\Delta_a} \Phi_a(x^b) \tag{3.8}$$

mit einer reellen Zahl $\Delta_a \in \mathbb{R}$ und $\varphi(b,x) = 1 + 2\langle x, b\rangle + |x|^2|b|^2$.
Die Zahl Δ_a heißt konformes Gewicht des Feldes Φ_a.

Es sei darauf hingewiesen, daß $\varphi(b,x)^{-d}$ die Jacobi-Determinante der Transformation $x \mapsto x^b$ ist. Speziell ergibt sich für die Streckungen mit λ

$$U(\lambda)\Phi_a(x)U(\lambda)^{-1} = \lambda^{\Delta_a}\Phi_a(\lambda x) \ .$$

Die speziellen konformen Transformationen werden durch die Elemente aus M parametrisiert. Wir haben somit wiederum infinitesimale selbstadjungierte Erzeugende $Q_k,\ k = 0, 1, \dots, d-1$ mit

$$\mathrm{i}\,[Q_k, \Phi_a(x)] = \big(|x|^2\partial_{x_k} - 2\eta_k x_k E - 2\Delta_a \eta_k x_k\big)\Phi_a(x) \ . \tag{3.9}$$

Hierbei ist $E = \sum_{m=0}^{d-1} x_m \partial_{x_m}$ der Euler-Operator und die η_k sind die Metrikkoeffizienten ($\eta_0 = 1,\ \eta_m = -1,\ m \geq 1$).

Zweidimensionale konforme Quantenfeldtheorie.

Im zweidimensionalen sind die sogenannten *Lichtkegelkoordinaten* $t = x_0 - x_1$, $\bar{t} = x_0 + x_1$ besonders geeignete Koordinaten. Ich schließe mich hier dem teilweise verwirrenden Brauch an, $\bar{t}$ zu schreiben, aber darunter nicht das komplex Konjugierte von t zu verstehen. Bisher ist $t, \bar{t} \in \mathbb{R}$. Für die Metrik gilt $|x|^2 = t \cdot \bar{t}$. Der Vorwärtslichtkegel ist gegeben durch $t \geq 0,\ \bar{t} \geq 0$. Für die infinitesimalen Erzeugenden der Translationen und speziellen konformen Transformationen werden entsprechende Elemente gewählt

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(P_0 - P_1), & \bar{P} &= \frac{1}{2}(P_0 + P_1) \\ Q &= -\frac{1}{2}(Q_0 + Q_1), & \bar{Q} &= \frac{1}{2}(Q_1 - Q_0) \ . \end{aligned}$$

Die Felder $\Phi_a(t,t)$ können analytisch ausgedehnt werden auf

$$\{t \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, t > 0\} \times \{\bar{t} \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, \bar{t} > 0\} \subset \mathbb{C}^2 \ .$$

(Genauer: Ausgedehnt werden kann ihre Einschränkung auf den Unterraum D, der vom Vakuumvektor erzeugt wird.) Um dies zu sehen, benutzt man die aus der Translationskovarianz (3.5) und der Invarianz des Vakuums hervorgehende Gleichung

$$\Phi_a(x+q)|0\rangle = \exp(\,\mathrm{i} \sum q_k P_k)\Phi_a(x)|0\rangle \ .$$

In den Lichtkegelkoordinaten "entkoppeln" die speziellen konformen Transformationen zu

$$t^b = \frac{t}{1 + b_+ t}, \qquad \bar{t}^b = \frac{\bar{t}}{1 + b_- \bar{t}}$$

($b_\pm = b_0 \pm b_1$) und die konforme Gruppe besteht aus den gebrochen-linearen Transformationen

$$\gamma(t,\bar t) = \left(\frac{at+b}{ct+d}\ ,\ \ \frac{\bar a\bar t+\bar b}{\bar c\bar t+\bar d} \right)$$

mit den Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, bzw. $\begin{pmatrix} \bar a & \bar b \\ \bar c & \bar d \end{pmatrix}$ aus $SL(2,\mathbb{R})$.

Für die Poincaré-Kovarianz und die spezielle konforme Kovarianz erhält man ($\Delta_a = \bar\Delta_a$)

$$U(\gamma)\Phi_a(t,\bar t)U(\gamma)^{-1} = (ct+d)^{-2\Delta_a}(\bar c\bar t+\bar d)^{-2\bar\Delta_a}\Phi_a(\gamma(t,\bar t))\ .$$

Es gilt

$$\mathrm{i}\,[P,\Phi_a(t,\bar t)] = \partial_t\Phi_a(t,\bar t), \qquad \mathrm{i}\,[Q,\Phi_a(t,\bar t)] = (t^2\partial_t + 2\Delta_a t)\Phi_a(t,\bar t)$$

und die entsprechenden Relationen für die überstrichenen Größen.

Es ist vorteilhaft, zur Kompaktifizierung $S^1\times S^1$ von $M=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ via

$$z = \frac{1+\mathrm{i}\,t}{1-\mathrm{i}\,t}, \qquad \bar z = \frac{1+\mathrm{i}\,\bar t}{1-\mathrm{i}\,\bar t}$$

und zu den Koordinaten z und $\bar z$ (auch dies ist nicht die komplexe Konjugation) überzugehen und ebenfalls die modifizierten Felder

$$Y(a,z,\bar z) = (1+z)^{-2\Delta_a}(1+\bar z)^{-2\bar\Delta_a}\Phi_a(t,\bar t)$$

zu benutzen. Diese Felder sind in $\{(z,\bar z)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C} \mid |z|<1, |\bar z|<1\}$ definiert. Dem Feld $Y(a,z,\bar z)$ kann durch $a = Y(a,z,\bar z)|0\rangle_{|z=\bar z=0}$ ein Vektor a aus D zugeordnet werden.

Führen wir

$$T = \frac{1}{2}(P+[P,Q]-Q) \qquad \text{und} \qquad H = \frac{1}{2}(P+Q)$$

ein, so erhalten wir

$$[T,Y(a,z,\bar z)] = \partial_z Y(a,z,\bar z), \qquad [H,Y(a,z,\bar z)] = (z\partial_z+\Delta_a)Y(a,z,\bar z)\ .$$

Desweiteren gilt

$$H|0\rangle = 0, \qquad T|0\rangle = 0, \qquad H\,a = \Delta_a a\ .$$

Die entsprechenden Relationen gelten für die überstrichenen Größen.

Da die Eigenwerte von $(P, \bar{P})$ und $(Q, \bar{Q})$ im Vorwärtslichtkegel liegen, also komponentenweise ≥ 0 sein müssen, sind die P und Q positiv-semidefinite selbstadjungierte Operatoren. Damit trifft dies auch für den Operator H zu. Insbesondere treten als konforme Gewichte, dies sind ja gerade die Eigenwerte von H, nur Zahlen ≥ 0 auf.

Betrachten wir nur die *rechts-chiralen* (bzw. *links-chiralen*) Felder, d.h. die Felder für die gilt $\partial_{\bar{t}} \Phi_a = 0$ (bzw. $\partial_t \Phi_a = 0$), so folgen aus den Wightman-Axiomen die Axiome einer Vertexalgebra, wie ich sie zu Beginn eingeführt habe. Physiker nennen diese Algebren auch *chirale Algebren.* Das Feld $Y(a, z)$ kann in eine Fourier-Reihe

$$Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}, \quad \text{mit} \quad a_{(n)} \in \operatorname{End} D$$

zerlegt werden. Der Raum V ist derjenige Unterraum von D, der von den Vektoren erzeugt wird, welche man erhält, indem man alle Polynome in den $a_{(n)}$ auf den Vakuumvektor $|0\rangle$ anwendet.

Die Vertauschbarkeit für raumartig getrennte Bereiche besagt

$$\Phi_a(t, \bar{t}) \Phi_b(t', \bar{t}') = \Phi_b(t', \bar{t}') \Phi_a(t, \bar{t}), \qquad \text{für} \quad (t - t')(\bar{t} - \bar{t}') < 0 \ .$$

Für rechts-chirale Felder ergibt sich wegen der Unabhängigkeit von der zweiten Variablen

$$\Phi_a(t) \Phi_b(t') = \Phi_b(t') \Phi_a(t), \qquad \text{für} \quad t \neq t' \ .$$

Sei $\delta(t - t')$ die Deltadistribution mit Träger $t = t'$ und $\delta^{(j)}(t - t')$ jeweils die j-te Ableitung, so kann man dies auch schreiben als

$$[\Phi_a(t), \Phi_b(t')] = \sum_{j \geq 0} \delta^{(j)}(t - t') \ \Psi^j(t') \ ,$$

mit geeigneten Feldern $\Psi^j(t')$. Diese seien zu unserer Quantenfeldtheorie hinzugenommen. Nach Übergang zu den neuen Koordinaten gilt

$$[Y(a, z), Y(b, w)] = \sum_{j \geq 0} \delta^{(j)}(z - w) \, Y(c_j, w) \ . \tag{3.10}$$

Man kann zeigen, daß die Felder $Y(c_j,w)$ das konforme Gewicht $\Delta_a+\Delta_b-j-1$ haben. Da die konformen Gewichte nach unten beschränkt sind, treten somit nur endlich viele Summanden auf. Es gilt

$$(z-w)^k\,\delta^{(j)}(z-w)=0, \qquad k\geq j,$$

wie Herr Breulmann in seinem Vortrag erläutern wird. Die Gleichung (3.10) schreibt sich also in unsere Lokalitätsforderung

$$(z-w)^N\ [Y(a,z),Y(b,w)]=0\ , \qquad N\gg 0$$

um.

Nebenbemerkung: Die Deltadistribution in unserem Set-up ist definiert als

$$\delta(z-w)=z^{-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n w^{-n}\ .$$

Auch dies wird Herr Breulmann näher erläutern.

Einige Literaturhinweise

[FLM] Frenkel, I., Lepowski, J., Meurman, A., *Vertex operator algebras and the monster*, Academic Press, 1988.

[KLA] Kac, V., *Infinite dimensional Lie algebras*, 3. edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Kac] Kac, V., *Vertex algebras for beginners*, University Lecture Series, Vol. 10, AMS, 1997.

[KaRa] Kac, V., Raina, A.K., *Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras*, Adv. Ser. in Math. Physics Vol.2, World Scientific, 1987.

[Scho] Schottenloher, M., *Eine mathematische Einführung in die konforme Feldtheorie*, Vorlesungsausarbeitung, München gk-mp-9510/21, 1995.